

Relativitetsteorin

Christian Davén

1998-99

Förord

Denna avhandling skrevs av Christian Davén under sista året i gymnasiet. Avhandlingen är hämtad direkt ur dennes specialarbete, och bör därför inte ses som helt vetenskaplig. Texten innehåller brister bland annat i fråga om bevisgiltighet, men trots detta har författaren valt att inte ytterligare redigera den.

Ursprungligen skrevs avhandlingen i en ordbehandlare, men 2002 konverterade författaren texten till L^AT_EX-formatet och publicerade detta PDF-dokument. Vid konverteringen skapades ny grafik och samtliga ekvationer skrevs om. Ord-förklaringarna som tidigare återfanns längst bak har nu satts in som fotnoter vid den första förekomsten av respektive ord. Referenser och hänvisningar förenklades också, för att få texten så ”ren” som möjligt.

Tidigare har avhandlingen funnits tillgänglig i html-format på webben, men då PDF-formatet är bättre anpassat för utskrift har det senare ersatt det förra. Det här dokumentet finns tillgängligt på <http://www.christian.daven.name>.

Innehåll

1	Den speciella relativitetsteorin	3
1.1	Relativitet	3
1.1.1	Rummets relativitet	3
1.1.2	Tidens relativitet	4
1.2	Ljusfartens konstans	4
1.3	Den speciella relativitetsprincipen	5
1.4	Tidsdilatationen	6
1.5	Samtidighet	9
1.5.1	Samtidighetens relativitet	9
1.5.2	Synkronisering av klockor, metod 1	10
1.5.3	Synkronisering av klockor, metod 2	10
1.6	Längdkontraktionen	11
2	Den allmänna relativitetsteorin	12
2.1	Tröghet och gravitation	12
2.1.1	Einsteins låda	12
2.1.2	Ekvivalensprincipen	13
2.2	Rumtiden	14
2.2.1	Rumtidens invarians	15
2.2.2	Gravitationsfält och geodetiska linjer i rumtiden	16
2.3	Den allmänna relativitetsprincipen	17

1 Den speciella relativitetsteorin

I juni 1905 publicerades i *Annalen der Physik* (dåtidens ledande tidskrift för teoretisk fysik) en artikel som gick under rubriken *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, eller ungefär ”Om förflyttande kroppars¹ elektrodynamik²” [9]. Redan i inledningen väcker den då 26-åriga Albert Einstein (det var han som skrev artikeln) uppmärksamhet genom att utmana den klassiska mekaniken³. Han lägger där fram påståendet att ljus alltid fortplantar sig i tomma rymden med hastigheten c , som är oberoende av ljuskällans hastighet [4]. Detta postulat⁴, tillsammans med en utökning av relativitetsprincipen (se detta avsnitt), var tillräckligt för honom för att grunda ett helt nytt synsätt inom fysiken.

Anmärkas bör att namnet den *speciella* relativitetsteorin anger att det endast är i specialfall den är giltig – nämligen då en kropp befinner sig så långt bort från alla andra kroppar att dessa inte påverkar varandra med gravitation. Dessutom kan den inte appliceras på accelererande rörelser, utan endast de där hastigheten är konstant. Då måste vi använda oss av den allmänna, universella, relativitetsteorin.

1.1 Relativitet

Som du hör på namnet handlar relativitetsteorin om just relativitet. Och med det menar man att vissa saker (absolut inte allt!) är relativa – uppfattas olika av olika iakttagare. Det finns en hel del exempel från vardagslivet, till exempel på en bilväg: du kör i 50 km/h och blir ständigt omkörd av tutande bilar. De anser att du kör för långsamt, men tittar du till höger ser du en mängd cyklister som alla passerar av dig. Jämfört med de andra bilisterna kör du långsamt, men jämfört med cyklisterna kör du fort. Uppfattningen av din hastighet är relativ, men din hastighet är fortfarande 50 km/h. Det är inte denna sorts relativitet som relativitetsteorin behandlar, men nu vet du i alla fall vad som menas med relativitet.

1.1.1 Rummets relativitet

Om du håller två föremål i din hand och för dem från varandra är det tydligt att avståndet dem emellan ökar. Men att säga att det ena eller det andra föremålet har rört sig är inte korrekt. För att kunna säga att ett objekt har förflyttats måste vi ange det *i förhållande* till något. Vi måste ange referensram.

En referensram är ett tänkt koordinatsystem i vilket ett förutbestämt objekt alltid befinner sig i vila. Oavsett hur objektet rör sig följer koordinatsystemet med i rörelsen – på så sätt är det alltid andra föremål som rör sig och referensramen som ligger still. (Vid en första anblick verkar det strida mot naturlagarna, men så är inte fallet. Eftersom absolut rörelse inte existerar kan vi göra så här.)

Vi återgår till experimentet med föremålen i din hand. När vi instinktivt säger att båda föremålen rörde sig, vad har vi då förutsatt? Vi har valt marken

¹I fysiken en synonym till föremål, objekt.

²Läran om elektricitet i rörelse.

³De lagar som Galileo Galilei (1564-1642) och Sir Isaac Newton (1642-1727) formulerade som rör kroppars rörelse.

⁴En teori som utgår ifrån sin egen giltighet och sedan låter experiment påvisa den. (Den bevisas aldrig analytiskt.)

som referens kropp – men detta angavs inte (och kan aldrig förutsättas). Vi utvidgar experimentet ytterligare, och väljer ett av föremålen som referens kropp. En iakttagare som befinner sig på det föremålet (förvisso en mycket liten iakttagare) ser att det andra föremålet avlägsnar sig – han kan inte *se* att det föremål på vilket han befinner sig rör sig. Alltså är det det andra föremålet som förflyttas.

När vi säger att jorden rör sig runt solen har vi valt solen som referens kropp. På så sätt kommer alla rörelser att noteras i förhållande till solen, och vi kan korrekt säga att jorden och planeterna cirkulerar kring solen. Om vi skulle byta referensram så att istället jorden befinner sig ”i vila”, då skulle solen röra sig runt jorden, och även de andra planeterna skulle beskriva komplicerade banor kring moder Jord.

Observera att trots att olika koordinatsystem uppfattar ”verkligheten” olika är inget mer sant än något annat. Vi kan utöka termen koordinatsystem till att omfatta alla objekt – vart och ett ser verkligheten på sitt sätt, och alla ”har rätt”. Verkligheten är subjektiv! (Eller som Einstein själv en gång sa: ”en sann uppfattning om materien finns inte” [5]. Detta uttalande tvangs han dock ta tillbaka, men det återkommer vi till.)

1.1.2 Tidens relativitet

I Principia Mathematica säger Newton att tiden är absolut, det vill säga att den är helt oberoende av kroppars rörelser [9]. Följderna av en absolut tid är att ett tidsintervall⁵ mellan två händelser kan bestämmas till ett värde som inte ändras vem som än uppmäter det. Mycket praktiskt, men tyvärr felaktigt.

På samma sätt som rörelsen är relativ menade Einstein att tiden är relativ. Och med det menade han inte att tiden *känns* långsam när man har tråkigt, utan att den verkligen *går* långsammare – när man rör sig fort. Men trots att tiden går långsammare när vi rör oss fort kommer vi aldrig märka det – om vi inte jämför klockor med någon som rör sig långsammare än vi. En sekund kommer alltid vara en sekund lång, men stillastående kroppar kan anse att vår sekund kanske är en halv minut lång.

Tills vidare räcker det att du känner till att tiden är relativ, men längre fram i denna avhandling kommer jag visa hur det kan förhålla sig så.

1.2 Ljusfartens konstans

Att ljuset rör sig med ungefär 300 000 000 m/s vet de flesta. Men om jag säger så här: om du färdas bort från solen med låt oss säga halva ljushastigheten, så skulle solstrålarna ändå passera dig med trehundra miljoner meter per sekund! Detta chockerande faktum är ett av Einsteins postulat som ligger till grund för relativitetsteorin.

Men hur är det möjligt att ljusets hastighet inte ändras beroende på min egen fart? En någorlunda fullständig förklaring av detta skulle kräva mer utrymme än resten av detta arbete, så vi nöjer oss med att säga att Einstein hade rätt.

Som jag tidigare nämnde sa Einstein att ljusets hastighet var oberoende av ljuskällans rörelse – och eftersom rörelser är relativa kan vi säga att inte heller iakttagarens hastighet påverkar ljusfarten.

⁵Avstånd i tid, förfluten tid.

Det var inte bara Einsteins fantasi som sade detta – experiment hade tidigare bevisat att ljusets fart faktiskt inte minskar när man rör sig snabbt mot det. Men när vetenskapsmännen stod frågande inför detta faktum förändrade han fysikens lagar så att de stämde överens med detta.

Före Einsteins tid trodde man att det överallt fanns något som kallades etern. Den omslöt allt i hela universum och trängde igenom all materia – den var absolut och alltid i vila. Pumpade man ut all luft ur en flaska skulle etern ändå fylla flaskan [5]. På samma sätt som ljudet kräver ett medium för att fortplanta sig var det i etern ljuset färdades [6]. Man ansåg att ljusets hastighet alltid var densamma i förhållande till etern, men att en iakttagare som rörde sig relativt etern skulle uppfatta en annan hastighet på ljuset.

Albert Michelson och Edward Morley utgick från denna teori när de 1887 mätte ljusets hastighet i både jordens rörelseriktning och i rät vinkel mot denna. Enligt eterteorin kan inte jorden vara i vila jämfört med etern hela året (jorden beskriver ju en ellipsformad bana), alltså måste ljusfarten relativt jorden vara olika vid olika tidpunkter på året [12]. Efter ett flertal experiment insåg de att så inte var fallet; ljusfarten var konstant under hela året.

Fysikerna sökte ett svar på denna gåta under nästan två decennier, men det var Einstein som kom med lösningen; begreppet etern är ”onödigt” om man bara ville överge tanken om en absolut tid [12]. (I avsnittet om tidsdilatationen visar jag varför absolut tid motsäger ljusfartens konstans, och vice versa.)

Men Einstein sa inte bara att ljusfarten är konstant oavsett ljuskällans rörelse, utan även att *endast* vågrörelser utan massa kan röra sig med ljusfarten – och att de alltid gör det. (Begreppet ljusfarten gäller som sagt inte bara ljus, utan alla elektromagnetiska vågor. Radiovågor och mikrovågor rör sig därför också med ljusets hastighet.)

Observera att ljusfarten alltid är konstant, men att denna konstant varierar med materien i vilket ljuset fortplantar sig. I vakuum kallas konstanten c , och i vatten rör sig ljuset långsammare, men farten är fortfarande konstant – och ingenting kan gå fortare än det.

1.3 Den speciella relativitetsprincipen

När en person ombord på ett flygplan kastar en boll mot golvet säger vår intuition att den kommer att studsas. Om vi förutsätter att flygplanet varken accelererar eller roterar, och att bollen kastas rakt ned mot flygplansgolvet, så kommer den återvända till ursprungsläget (om kastet var tillräckligt hårt). Samma sak skulle hända ”nere på jorden”. Detta är i grova drag den speciella relativitetsprincipen (observera skillnaden mellan relativitets*principen* och relativitetsteorin).

Tröghetslagen ingår i den klassiska mekaniken och lyder som följer: ”en från andra kroppar tillräckligt avlägsen kropp förblir i ett tillstånd av vila eller likformig rätlinjig rörelse⁶” [11]. Den innebär att om en kropp är så långt bort från alla andra kroppar att de inte påverkar den med gravitation, så kommer den antingen förbli i vila eller beskriva en likformig rätlinjig rörelse (beroende på vilket referenssystem vi väljer).

Ett koordinatsystem som rör sig på så sätt att tröghetslagen gäller för det (alltså likformigt) kallas ett galileiskt koordinatsystem, eller inertialsystem. I

⁶En rörelse längs en rät linje (varken till höger eller till vänster, utan rakt fram), med oförändrad hastighet.

alla galileiska koordinatsystem, och endast i dem, är lagarna i den klassiska mekaniken giltiga [11]. Det vill säga: det spelar ingen roll om du står på jorden och studsar en boll, eller på ett flygplan (fritt från gravitationspåverkan) – bollen återvänder till dig, och dess bana kan räknas ut oberoende av referensram. Detsamma gäller för alla Newtons rörelselagar – de är oberoende av referensram.

Einstein kom ju fram till att ljusfarten är en konstant som inte heller är beroende av referensram (ljuskällans rörelse), och därför ansåg han att den måste inkluderas i den speciella relativitetsprincipen.

1.4 Tidsdilatationen

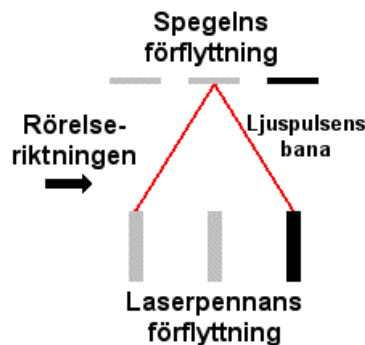
Tänk dig att du befinner dig i en stillastående tågagn. I taket finns en fastmonterad spegel, och i din hand håller du en laserpenna som kan skicka mycket kortvariga ljuspulser. Du skickar en ljuspuls mot spegeln, rakt underifrån. Ljuspulsen reflekteras som väntat rakt nedåt, mot din laserpenna.

Om tågagnen rör sig då?

Det blir samma resultat eftersom relativitetsprincipen gäller.

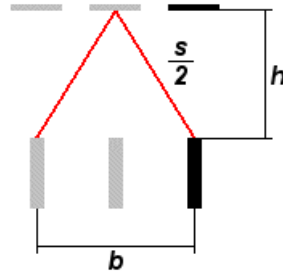
För att göra det hela ännu litet krångligare ber jag dig att i din fantasi ställa dig på banvallen och låta någon annan ta över din tidigare roll. Läggs nu märke till hur laserpennan ter sig när tågagnen passerar dig. Den rör sig precis som tågagnen, eller hur? Men när du var ombord på tåget låg laserpennan still i din hand! Denna skillnad ligger i att du befinner dig i banvallens system och laserpennan i tågagnens – och dessa system är i rörelse relativt varandra.

Tänk nu tillbaka på hur ljuspulsen rörde sig när tågagnen passerade. Den startade från laserpennan, vände i taket och ner till laserpennan igen. Men laserpennan rörde sig, sa vi ju! Det måste innebära att ljuspulsen också rörde sig i sidled, inte bara från laserpennan till taket, och ned igen!



Då laserpennan förflyttade sig och ljuspulsens bana ändå slutade i laserpennans mynning måste det ha sett ut på det här sättet. ”Men”, säger du, ”är då inte ljuspulsens bana längre nu än då jag var ombord på tåget?” Jo, helt riktigt.

När du var ombord på tåget gick ljuspulsen raka vägen upp till spegeln, och sedan raka vägen ner till laserpennan. Längden av den förflyttningen, s , kan vi teckna som $s = 2h$ (h är avståndet mellan laserpennan och spegeln). Men nu, när ljuspulsen rör sig även i sidled, måste vi återuppväcka gamle Pytagoras och använda oss av hans berömda sats, $a^2 + b^2 = c^2$, för att kunna räkna ut den av ljuspulsen tillryggalagda sträckan.



Då ljuspulsens bana nu beskriver två trianglar kan vi lätt räkna ut dess längd, men för att skilja sträckorna åt kallar vi denna sträcka s och den förra s_0 .

(Jag har numrerat ekvationerna för att lättare kunna hänvisa till dem.)

$$(1) \quad s = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Vi skriver de båda uttrycken bredvid varandra.

$$(2) \quad s_0 = 2h$$

$$(3) \quad s = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Här ser vi att beroende på vilket referenssystem vi väljer färdas ljuspulsen olika långa sträckor. När du stod inuti vagnen var sträckan s_0 , men när du står på banvallan är den s . Om vi skulle teckna hastigheten v på ljuspulsen med hjälp av sträckan s och tiden t så skulle det se ut så här:

$$(4) \quad v = \frac{s}{t}$$

Men då skulle vi få olika hastigheter på ljuset beroende på i vilket system vi befann oss (v är i detta uttryck analogt⁷ med ljushastigheten c). Det vet vi sedan tidigare att det inte är möjligt – ljusets hastighet är konstant, oavsett de yttre omständigheterna!

Men fortfarande skulle vi få olika värden på c (v) när vi sätter in s_0 och s i uttrycket. Och om vi utgår från att uttrycket gäller finns det bara en lösning – tiden för ljuspulsens bana, t , måste även den vara olika i de båda fallen! Vi kan nu teckna två nya uttryck för v (här bytte jag ut v mot c):

$$(5) \quad c = \frac{s_0}{t_0}$$

$$(6) \quad c = \frac{s}{t}$$

(Om teorin om en absolut tid varit riktig skulle dessa ekvationer istället tecknas $v_1 = \frac{s_0}{t}$ och $v_2 = \frac{s}{t}$, och ljusets hastighet skulle inte längre kunna vara oberoende av iakttagare. Men eftersom Einstein utgick från det kan vi fortsätta vår härledning ...)

⁷Motsvarande eller likartat.

När du stod i tågagnen och sköt en ljuspuls mot spegeln tog det t_0 sekunder innan ljuspulsen återvände till laserpennan. Men när du, från banvallen, iakttog samma skeende tog det t sekunder.

Vi skriver om ekvationssystemet 5-6 så här ...

$$(7) \quad \frac{s_0}{t} = \frac{s}{t}$$

...och sätter in uttrycken för s_0 och s ur ekvationerna 2 och 3:

$$(8) \quad \frac{2h}{t} = \frac{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{t}$$

Som du kanske kommer ihåg är b den sträcka som laserpennan förflyttats i sidled, och den är beroende av tågets hastighet v och tiden t , och tecknas så här:

$$(9) \quad b = vt$$

Observera att tiden t fortfarande är ur banvallens perspektiv – enligt tågagnen har ju inte laserpennan förflyttat sig, därför är t_0 inte intressant här.

Eftersom h är halva sträckan s_0 (ekvation 2) och $s_0 = ct_0$ (omskrivning av ekvation 5) så kan vi skriva om också h .

$$(10) \quad h = \frac{ct_0}{2}$$

Nu ser ekvation 8 ut så här:

$$(11) \quad \frac{2ct_0}{2t_0} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{ct_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{vt}{2}\right)^2}}{t}$$

Krängligt, eller hur? Vi förenklar den vidare (jag tar inte med alla steg):

$$(12) \quad ct = 2\sqrt{\left(\frac{ct_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{vt}{2}\right)^2}$$

$$(13) \quad c^2t^2 = c^2t_0^2 + v^2t^2$$

$$(14) \quad t^2 = \frac{t_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nu är vi ett steg från den slutgiltiga formeln, som visar hur fort tiden går i ett system som rör sig i förhållande till en iakttagare. t_0 får då representera egentiden⁸, v den relativa hastigheten mellan systemen och t den tid som iakttagaren anser har förflutit. Så här ser tidsdilatationsformeln ut:

$$(15) \quad t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

⁸Den tid som avser en viss kropps händelseutveckling och uppmäts av den själv.

Vad vi nu kommit fram till är att tiden i ett system som rör sig går långsammare än i det system som ”står still”. (Och eftersom rörelser är relativa kommer båda systemen hävda att det andra systemets klockor går långsammare!)

Faktorn $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ kallas gammafaktorn (γ) [8], men är i de flesta fall försumbar eftersom v måste vara större än $1,3 \times 10^7$ m/s för att en tidsförändring på 1 (?) ska uppnås. Dock ökar felmarginalen exponentiellt med hastighetsökningen – vid mycket höga hastigheter kan skillnaden mellan t och t_0 vara hur stor som helst!

1.5 Samtidighet

För att kunna avgöra huruvida två händelser är samtidiga eller ej kan vi använda oss av ett enkelt knep: ljusfarten är konstant, alltså måste ljuset från två händelser, till exempel blixtnedslag, ”mötas” på mitten. En person som står mitt emellan de båda nedslagen kommer se dem samtidigt. Om han istället placerar sig närmare platsen för det ena nedslaget kommer han se det före det andra, eftersom ljuset nu färdas olika sträckor. Dock kan han enkelt räkna ut tidpunkten för de båda blixtnedslagen och komma fram till att de fortfarande är samtidiga. Men för att inte blanda in matematiken brukar man säga att en person som befinner sig mitt emellan två händelser *när de äger rum* bestämmer om de är samtidiga eller ej.

1.5.1 Samtidighetens relativitet

I ett och samma referenssystem är två händelser samtidiga om de uppfattas som samtidiga av en iakttagare placerad mitt emellan händelserna (när de inträffar). Men i ett annat referenssystem *kan* de inte vara samtidiga [7].

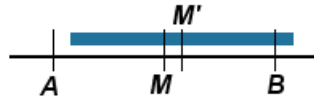
Vi placerar en iakttagare på banvallen och en ombord på tåget, vid dess mittpunkt. Den position där banvallens iakttagare befinner sig kallar vi M, och tågets mittpunkt kallar vi M'. Positionerna A och B sätts ut så att avståndet mellan dem exakt motsvarar tågets längd, och så att avståndet AM är lika långt som BM. Nu är M mittpunkten på sträckan AB, och iakttagaren vid M är härmed en legitim ”samtidighetbedömare”.

När tåget kommer rullandes från A mot B och M' är mitt för M, som på bilden ...



... då slår blixten ned i A och B (enligt banvallens referenssystem). Ögonblicket senare når ljuset från de båda blixterna iakttagaren vid M, *samtidigt*. Men hur uppfattade den rörliga iakttagaren situationen?

Blixten slog ned i A och B när M' var i höjd med M, men eftersom M' är i rörelse, på väg mot B, så har M' hunnit röra sig litet mot B innan ljuset når fram.



Nu är inte längre sträckan AM' lika lång som BM' , vilket innebär att ljuset från B når M' först. Enligt tågets referenssystem är inte de båda ljusblixtarna samtidigt, trots att de är det enligt banvallens [3]!

(M' befann sig mitt emellan A och B när blixtarna slog ned, vilket var vår definition av en iakttagare som kan bestämma samtidighet. De båda punkterna M och M' är bägge "auktorerade" när det gäller att avgöra samtidighet, men M' är i rörelse, därav de olika resultaten.)

1.5.2 Synkronisering av klockor, metod 1

Enligt samtidighetsdefinitionen ska en person som står mitt emellan två klockor anse att de visar samma tid för att de ska vara synkroniserade.

En metod för att synkronisera klockor *i samma referenssystem* är att använda sig av ljussignaler (observera att detta är en definition, inte en praktisk beskrivning). Om en ljussignal går från klockan A vid tiden t_{A1} , reflekteras vid klockan B vid tiden t_B och återvänder till A vid tiden t_{A2} gäller detta:

$$t_B - t_{A1} = t_{A2} - t_B$$

... vilket kan skrivas om som:

$$t_B = \frac{t_{A1} + t_{A2}}{2}$$

Detta innebär att klockan B vid reflektionen ska visa medelvärdet av avsändande och mottagande i A, uppmätt av klockan A [9].

1.5.3 Synkronisering av klockor, metod 2

Den förra definitionen av synkronisering förutsatte att ljuset färdas med samma hastighet från A till B som från B till A. Trots att ljusfartens konstans är allmänt accepterad möter detta uttalande kritik; ingen har bevisat att ljusfarten är samma i alla riktningar [7].

Med följande definition slipper vi diskussionen om ljusfarten:

Vi låter en tredje klocka, kallad μ , synkroniseras med A, på plats, och därefter färdas till B med en låg hastighet, ϵ , i storleksordningen 10^{-9} gånger ljushastigheten (motsvarande 0,3 m/s), där B ställs enligt μ .

Den tid som enligt μ förflyter under dess förflyttning mellan A och B är τ_μ :

$$\tau_\mu = \frac{t_A}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{c^2}}}$$

(t_A är den förflutna tiden enligt klocka A.)

Eftersom ϵ är så otroligt liten jämfört med c kan vi avrunda $\frac{\epsilon^2}{c^2}$ till noll ("egentligen" blir det 10^{-18}), och då får vi att $\tau_\mu = t_A$, vilket innebär att μ visar samma tid som A när så kommer fram till B – och B kan på så sätt synkroniseras med A [7].

Naturligtvis protesterar du, det här kan väl inte vara vetenskapligt? Klockan μ kan ju inte visa samma tid som A när den har rört sig! Nej, men låt oss se till fakta.

En sekund är definierad som nio miljarder svängningar hos en viss cesium-isotop, och det är med hjälp av detta våra allra noggrannaste atomur visar tidens flöde [1]. Exaktheten är häpnadsväckande; maximalt en mikrosekunds felmarginal på ett år! Slår du ut detta över året, så ser du att dessa klockor varje sekund "går fel" med maximalt 3×10^{-14} sekunder!

Jämför detta med skillnaden mellan τ_μ och t_A , som är $\frac{1}{\sqrt{1-10^{-18}}}$! Du ser snabbt att skillnaden är så mycket mindre än atomurets "inbyggda" felmarginal att den inte är mätbar – den påverkar inte resultatet. Vi kan med gott samvete kalla denna metod "vetenskaplig".

1.6 Längdkontraktionen

Som en direkt följd av tidsdilatationen och formeln för hastighet sker vid rörelse något som kallas längdkontraktionen. Den innebär att sträckor i rörelse relativt en iakttagare förkortas i rörelseriktningen [1].

När en rymdraket färdas mycket fort kommer dess egentid inte svara mot jordens uppmätta tid, utan avvika med gammafaktorn, γ . Om vi skulle ställa upp en ekvation för hur lång sträcka den färdas på tiden t_0 skulle det se ut så här:

$$s_0 = vt_0$$

(Där v är hans hastighet relativt den "stillastående" iakttagaren, jorden.) Vi drar oss till minnes tidsdilatationsformeln;

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

... vilket är samma sak som $t = \gamma t_0$.

Med dessa två formler kan vi enkelt uttrycka den sträcka rymdraketen tillryggalagt enligt den "stillastående" iakttagaren:

$$s = \frac{vt_0}{\gamma}$$

Om vi kallar s_0 för L_0 och s för L , så kan vi skriva formeln på detta sätt:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Men observera att längdkontraktionen endast gäller för sträckor i rörelseriktningen! Sträckor vinkelrätt mot denna påverkas inte av hastigheten [1].

(Längdkontraktionen ger inte, i praktiken, alltid den effekt som här visats. Ljuset från ett långt föremål behöver, från de olika delarna av föremålet, olika lång tid för att nå iakttagaren. Här kommer samtidighetens relativitet in och säger att det jag ser inte nödvändigtvis behöver vara den "sanna" avbildningen av föremålet. Föremålet kan i vissa fall se längre ut (än vad det "egentligen är"), eller till och med vridet (beroende på föremålets rörelse) [1].)

2 Den allmänna relativitetsteorin

Tio år efter offentliggörandet av den speciella relativitetsteorin grubblade Einstein fortfarande över accelerationen. Den speciella relativitetsteorin kunde bara hantera likformiga rörelser, men likväl fanns det accelererande rörelser. Även sådana rörelser måste lyda under någon lag. De flesta fysikerna sa att han borde acceptera att likformig rörelse⁹ är relativ, men att accelererad rörelse är absolut [5]. Han var dock inte nöjd med det ställningstagandet, utan fortsatte fundera.

Till sist (år 1916) publicerade han den färdiga, allmänna relativitetsteorin, som hanterade alla former av rörelse – inklusive accelererad sådan.

2.1 Tröghet och gravitation

Både Galilei och Newton var övertygade om att två olika stora kroppar skulle falla till marken precis lika fort – om vi bortser från luftmotståndet [5]. Och ändå säger Newtons tredje lag att tunga kroppar utsätts för större gravitation än lätta. För att undvika en paradox var Newton tvingad att göra ett mycket egendomligt antagande; på samma sätt som tyngdkraften drar kanonkulan nedåt hålls den tillbaka av sin egen tröghet¹⁰ [5].

”Om föremålet A är dubbelt så tungt som föremålet B är också dess tröghet dubbelt så stor. För att accelerera föremålet A till en viss hastighet krävs en kraft som är två gånger så stor som den kraft som behövs för att accelerera föremålet B till samma hastighet” (ibid.). När gravitationen ”drar” i föremålet A måste den alltså ”dra” dubbelt så hårt som i föremål B för att de ska falla lika fort.

Det vi i vanliga fall kallar massa är trög massa, och tyngden är den tunga massan. De två begreppen är inte samma sak, men alla kroppars tyngd är proportionell mot massan. Den tröga massan betecknar föremålets motstånd mot acceleration, och den tunga massan är ett gravitationsfälts påverkan på föremålet.

Omkring år 1900 genomförde den ungerske fysikern Roland von Eötvös en serie experiment som bekräftade att den tunga massan alltid är proportionell mot den tröga massan. På senare tid har forskarna utfört noggrannare experiment, och kommit fram till samma resultat (ibid.).

Newton var medveten om denna balansgång mellan trögheten och gravitationen, men han kunde inte förklara den – utan såg det som ett märkligt sammanträffande (ibid.).

2.1.1 Einsteins låda

Föreställ dig en stor låda långt ut i rymden, helt opåverkad av gravitation från stjärnor, svarta hål och planeter. Inuti lådan finns en man som inte har en aning om var han befinner sig. När lådan står still eller beskriver en likformig rörelse svävar han omkring i den, från sida till sida. Mannen i lådan känner inte av någon sorts gravitation, och gissar därför att han är ute i rymden någonstans.

På lådans ena sida sitter en krok med ett rep. Plötsligt börjar en okroppslig varelse dra i repet med en konstant acceleration. Mannen i lådan ramlar

⁹En rörelse som inte ändrar hastighet.

¹⁰En kropps motstånd mot acceleration.

mot sidan mitt emot kroken; han ramlade ”nedåt”. För att inte ligga raklång på ”golvet” ställer han sig upp. Han står nu upp på samma sätt som du och jag, som alla varelser på vilken planet som helst; benen motverkar kroppens tyngd och håller den uppe.

Han tar upp en jojo ur fickan och börjar joja. Det fungerar på precis samma sätt som han är van vid; den vänder vid snörets slut och återvänder till honom. För att ytterligare undersöka saken provar han att släppa olika stora föremål och ser hur de faller mot golvet. Alla föremål faller med samma acceleration, och han är nu övertygad om att han befinner sig i ett gravitationsfält likt det hos en planet.

Han ställer sig frågan varför inte lådan faller i gravitationsfältet. (Gravitationsfält ”drar till sig” kroppar, och ju närmare gravitationsfältets källa kropparna kommer desto högre blir accelerationen (?). Men mannen märker ingen skillnad hos föremålen han släpper – de faller med samma acceleration varje gång.) Då ser han kroken i ”taket” och förmodar att lådan hänger i ett gravitationsfält.

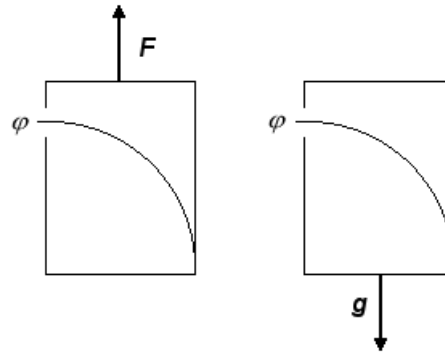
Varför tror han att han befinner sig i ett gravitationsfält?, när han i själva verket dras fram genom rymden med likformig acceleration. Lådan befinner sig ju så långt från alla kroppar att de inte utövar någon gravitation på den! Läs vidare, snart avslöjar jag hemligheten . . .

2.1.2 Ekvivalensprincipen

Denna princip, som är Einsteins tredje postulat, kom redan 1907 och är grundpelaren i den allmänna relativitetsteorin [10].

Tänk dig ett koordinatsystem K' , som rör sig med en likformigt accelererande rörelse relativt ett galileiskt koordinatsystem K . Runt omkring de båda koordinatsystemen finns många föremål, som alla är i vila enligt K . Enligt K' har alltså alla dessa föremål en konstant acceleration, och alla föremålen accelererar lika snabbt. I ett gravitationsfält accelererar alla föremål med samma hastighet, alltså ger det samma effekt att sätta K' som referenssystem (i vila) och påstå att det existerar ett gravitationsfält – föremålens acceleration är fortfarande lika stor. Acceleration eller gravitationsfält är helt enkelt ett val av referenssystem [2].

Om ett föremål ω träder in med ”enbart horisontell rörelse” i en accelererande låda kommer den fortsätta sin färd rakt framåt. Men eftersom lådan accelererar kommer ω inte träffa den motstående väggen i samma höjd som den inträdde i lådan, utan längre ned (ω har rört sig vertikalt endast i förhållande till lådan). Om ω träder in i en på jorden stillastående låda kommer den attraheras av jordens gravitationsfält och röra sig vertikalt (nedåt) under sin färd genom lådan.



ω :s rörelse är likadan i den accelererande lådan som i den på jorden stillastående! Slutsatsen blir att en accelererande rörelse ger upphov till samma företeelser som ett gravitationsfält.

När mannen i lådan i det föregående avsnittet släppte föremålen föll de alla till "golvet" med samma acceleration – som en följd av vad han trodde var gravitation. En iakttagare i ett galileiskt koordinatsystem som kunde se in i lådan skulle anse att föremålens tröghet fick dem att vara stilla i luften tills "golvet" hunnit upp dem [2].

Ekvivalensprincipen säger att dessa båda påståenden är ekvivalenta, likvärdiga – helt enkelt därför att gravitation och tröghet är samma sak, de har inte bara likartade effekter. *Gravitation och tröghet är två olika ord för samma sak* [5]. (Alltså är gravitationsfält och acceleration två olika ord för samma sak.)

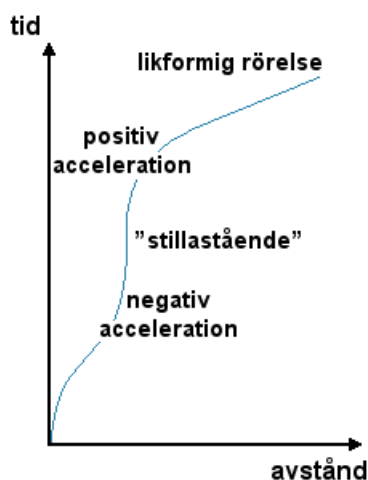
Ett gravitationsfält som det i lådan har inte samma matematiska struktur som de som omger stora kroppar, men är ändå ett äkta gravitationsfält [5]. Om två föremål skulle släppas långt ifrån varandra skulle de i lådan falla parallellt, men på jorden skulle de falla mot jordens centrum, vilket innebär att deras banor inte är parallella, utan möts vid just jordens centrum (i alla fall förlängningen av banorna – föremålen stannar vid jordytan).

2.2 Rumtiden

Då Einstein utarbetade sin allmänna relativitetsteori var han tvungen att tillgripa en fyrdimensionell geometri istället för den tredimensionella som vi vanligen utnyttjar [5]. Som en fjärde dimension valde han tiden.

Tänk dig en bilfärd genom en storstad. När bilen rör sig noterar vi en förändring i bilens placering i rummet, men när den står still vid ett rödljus menar vi att ingenting händer; bilen befinner sig på samma punkt. Detta är helt korrekt i det tredimensionella rummet, men om vi tar med tiden så ändras bilden helt. När bilen står still i rummet rör den sig ändå i tiden, och detta måste noteras för att kunna ge bilfärden en rättvis beskrivning. En tio timmar lång färd är inte alls samma sak som en hälften så lång, även om de var lika långa i rummet (lika lång färdsträcka).

Att på ett papper rita ett diagram över denna fyrdimensionella biltur, en världslinje, är omöjligt (papperet har endast två dimensioner). Ofta ritas man en världslinje med endast två dimensioner; tiden och en av rumsdimensionerna.



Men den egentliga, fyrdimensionella vägen ser annorlunda ut. Om vi tänker oss en dator som kan rita fyrdimensionella världslinjer, och ber den rita upp vår bilfärd, skulle den vara krökt i alla fyra dimensionerna eftersom vi accelererar, åker upp- och nedför kullar och svänger. Drar vi en rät linje från vår startpunkt till "målet" får vi något som kallas rumtidsintervallet [5], något som används för att mäta avstånd i rumtiden.

2.2.1 Rumtidens invarians

I den klassiska fysiken ansåg man att en boll alltid kommer se likadan ut, oberoende av hastigheten. Den speciella relativitetsteorin menade att "utseendet" visst är beroende av hastigheten – och den allmänna relativitetsteorin är en blandning av de båda synsätten.

Om man ser alla kroppar som fyrdimensionella strukturer (det är som sagt omöjligt att föreställa sig detta) är uppfattningen om dem inte beroende av hastigheten. Det fenomen som kallas längdkontraktionen existerar endast i den tredimensionella "verkligheten"; den fjärde dimensionen eliminerar denna kontraktion. Alla iakttagare, oavsett hastighet, är överens om ett föremåls fyrdimensionella "utseende". Detsamma gäller för rumtidsintervallet; det förändras inte med hastigheten [5]. Rumtiden ser likadan ut för alla iakttagare – men inte dess tredimensionella projektion rummet, eller den endimensionella tiden.

Detta är ett av de viktigare budskapen med relativitetsteorin; invariansen¹¹. Motsägelsefullt, kan tyckas – men betänk att det *relativa* som relativitetsteorin behandlar endast existerar i de tre rumsdimensionerna eller i tidsdimensionen. Håll upp en bok mot en lampa och betrakta skuggan som kastas mot väggen eller golvet. Vrid boken och du ser att skuggan ändrar form. Det är endast bokens tvådimensionella projektion som förändras; boken ser ju likadan ut, om än i ett annat läge. Det är samma sak med fyrdimensionella objekt; i rumsdimensionerna ser de olika ut beroende på tidsdimensionens förändring. Kort sagt; hastigheten förändrar föremåls utseende, exempelvis genom längdkontraktionen.

(I avdelningen om rummets relativitet skrev jag att Einstein hade sagt att "en sann uppfattning om materien finns inte", och här ser du varför han tvangs

¹¹Det att vara absolut och alltså inte ändras oavsett referensram.

ta tillbaka uttalandet. En sann uppfattning om materiens tredimensionella projektion finns inte, men om själva materien, i dess rumtidsmässiga, fyrdimensionella form, finns endast en uppfattning – och den är sann och absolut.)

2.2.2 Gravitationsfält och geodetiska linjer i rumtiden

Enligt tröghetslagen kommer ett föremål som inte påverkas av någon kraft röra sig likformigt längs en rät linje. Exempelvis så skulle jorden röra sig just så om den inte ”hölls kvar” av solens gravitationsfält.

Detsamma gäller i den allmänna relativitetsteorin, men med två tillägg; gravitation räknas inte som en kraft, och den räta linjen går inte genom rummet utan genom rumtiden. Alltså; kroppar, påverkade av gravitation eller ej, som inte påverkas av krafter rör sig längs en rät linje genom rumtiden [5].

Tack vare något som kallas *rumtidens krökning* har stora kroppar fortfarande samma effekter på andra kroppar – trots att gravitationen numera inte ses som en kraft. Man kan föreställa sig denna krökning med hjälp av en gummiduk som hålls utspänd, och ett äpple som läggs på duken. I äpplets omedelbara närhet blir det en liten ”grop” i duken, och placerar man en tråkula nära äpplet kommer den rulla mot det. Grovt sett är detta en modell av rumtidens krökning (ibid.), men tänk på att rumtiden är fyrdimensionell – det *går* inte att föreställa sig dess riktiga utseende (men att matematiskt beräkna den går alldeles utmärkt).

(Som en följd av rumtidens krökning är rumtiden i närheten av stora kroppar inte euklidisk – med raka koordinataxlar – utan gaussisk, som innebär att axlarna är böjda. Detta får underliga konsekvenser, som vi nu ska ta del av.)

I rumtiden rör sig alla kroppar (naturligtvis endast de som inte påverkas av yttre krafter) som sagt längs en rät linje, men det som är rätlinjigt i rumtiden kan verka krökt när det projiceras på det tredimensionella rummet. Om vårt datorprogram från tidigare skulle rita upp jordbanans till synes elliptiska rörelse i fyra dimensioner skulle det bli en alldeles rät linje (ibid.)!

Det kortaste och rakaste avståndet mellan två punkter kallas en *geodetisk linje*, och det är ett väl använt uttryck inom den allmänna relativitetsteorin. På ett papper är den ett rakt streck, och på ett klot är den en *storcirkelbåge* (spänn ett snöre mellan de två punkterna). Även i en fyrdimensionell, euklidisk geometri är en geodetisk linje det rakaste och det kortaste avståndet mellan två punkter, men i den gaussiska geometrin är det inte fullt så enkelt. Där är en geodetisk linje fortfarande det rakaste avståndet mellan två punkter, men samtidigt det *längsta* avståndet (ibid.). Det är omöjligt att förklara detta utan att tillgripa komplicerad matematik, så vi låter bli.

De intressanta följderna av den gaussiska geometrin och geodetiska linjer är att en kropp som rör sig utan påverkan av yttre krafter alltid ”väljer” den väg som tar den längsta tiden att färdas, mätt med dess egen klocka (detta kallades en gång av Bertrand Russel för ”den kosmiska lättjans lag”) (ibid.). Planeterna rör sig i ellipser runt solen därför att de är ”för lata” för att ta en annan väg. Äpplet faller till marken av samma anledning.

Om du binder fast ett äpple vid ett snöre och svänger det i cirklar känner du ett visst motstånd hos äpplet. Det är för att snöret hindrar det från att röra sig i en rak linje, dess tröghet drar i snöret och vill ”iväg”. När du släpper snöret far äpplet iväg längs en rät linje. Ungefär samma sak inträffar när ett äpple faller från ett träd; dess tröghet får fritt spelrum – och äpplet följer en geodetisk linje (som tack vare rumtidens krökning runt jorden går mot jordens

centrum) tills det hamnar på marken. Vi säger att det beror på gravitationen, men att hänvisa till trögheten är lika korrekt.

Även ljuset ”kröks” av gravitationen, men liksom alla andra kroppar rör det sig längs en rät linje i rumtiden, så denna krökning existerar endast i det tredimensionella rummet.



2.3 Den allmänna relativitetsprincipen

Newton sa att en person inte kan utföra några som helst mekaniska experiment för att ta reda på om han befinner sig i vila eller om han färdas med likformig hastighet. Den speciella relativitetsteorin utvidgade regeln till att gälla alla experiment, såväl mekaniska som optiska (den speciella relativitetsprincipen).

Ännu en utvidgning av principen måste ske för att den ska överensstämma med den allmänna relativitetsteorin; en iakttagare kan inte med några experiment bevisa att han är i rörelse, varken likformig eller accelererad sådan [5]. Eftersom vi på jorden befinner oss i ett gravitationsfält, och det är likvärdigt acceleration, befinner vi oss inte i vila ens på jordytan.

Men Einstein kom snart fram till att inte ens detta påstående stämmer överens med rumtidsstrukturen [3]. Han hade övergett den typ av koordinatsystem som den speciella relativitetsprincipen avser, de euklidiska, och övergått till det gaussiska systemet.

Den ”nya” formuleringen av relativitetsprincipen lyder: ”alla gaussiska koordinatsystem är likvärdiga för att beskriva naturlagarna”. (I begreppet *naturlag* inkluderar vi de mekaniska och optiska lagarna.) Naturligtvis är även alla euklidiska koordinatsystem likvärdiga för att beskriva naturlagarna, men Einstein kom på att föremål i acceleration (eller gravitationsfält) inte har euklidiska egenskaper, utan gaussiska [3].

(Att ett gaussiskt koordinatsystem är likvärdigt alla andra för att beskriva naturlagarna är *nåstan* samma sak som att säga att en iakttagare inte kan avgöra huruvida han beskriver en rörelse eller befinner sig i vila. Skillnaden ligger i det matematiska planet – när vi säger ”iakttagare” menar vi vanligtvis vare sig i euklidiska eller gaussiska koordinatsystem, utan i verkligheten, oavsett dess struktur.)

Referenser

- [1] Alphonse, Rune – Bergström, Lars m.fl., 1998. *Fysik för gymnasieskolan B*. Stockholm: Natur och Kultur.
- [2] Bariant, Jean-Franois. *General Relativity: a Very Weird World* (<http://www.svsu.edu/~slaven/gr/index.html>, tillgänglig 1999-02-20).
- [3] Einstein, Albert, 1961. *Relativity – The Special and the General Theory*. 15:e upplagan. New York, USA: Crown Publishers, Inc.
- [4] Einstein, Albert, 1905. *On the Electrodynamics of Moving Bodies* (http://ourworld.compuserve.com/homepages/eric_baird/ae_edynx.htm, tillgänglig 1999-02-22).
- [5] Gardner, Martin, 1964. *Relativitetsteorin*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- [6] Hawking, Stephen, 1989. *Kosmos – en kort historik*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.
- [7] Marmet, Paul, 1997. *Einstein's Theory of Relativity versus Classical Mechanics*. Gloucester, Kanada: Newton Physics Books.
- [8] Målmark, Christian, 1998. *Relativitetsteorin* (<http://home.swipnet.se/~w53153/Geometrodynamik/index.html>, tillgänglig 1999-02-20).
- [9] Månsson, Bengt, 1979. "Tidens relativitet och rumtidens struktur", *Astronomisk tidsskrift* nr. 4, s. 178-184.
- [10] Robertson, Edmund – O'Connor, John, 1996. *General Relativity* (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/General_relativity.html, tillgänglig 1999-03-15).
- [11] Wagner, Josef, 1972. *Vad Einstein verkligen sagt*. Stockholm: Rabén & Sjögren.
- [12] Woodhouse, Nicholas, 1992. *Special Relativity*. Berlin, Tyskland: Springer-Verlag.